

Beati gli ultimi, se riescono ad esserlo (Problema di Gennaio 2012)

Problema:

Piotr sta preparando la carbonara e Alice vorrebbe essere servita per ultima per raschiare il fondo senza darlo troppo a vedere.

Sarà Rudy a consegnare la zuppiera ad uno degli ospiti e tutti si serviranno seguendo la seguente regola:

la zuppiera viene passata al proprio vicino di destra o sinistra (puramente a caso) e quando uno ha in mano la zuppiera si serve della carbonara riempiendo il suo piatto, a meno che non sia già pieno; poi passa la zuppiera casualmente a uno dei suoi due vicini. Alice deve calcolare la probabilità di essere servita per ultima in funzione della distanza dal primo che riceve la zuppiera.

Risposta:

La probabilità di essere serviti per ultimi è indipendente dalla distanza dalla persona che riceve per primo la zuppiera, perciò se le persone a tavola sono n , a parte il primo che ha probabilità 0 di essere servito per ultimo, gli altri avranno probabilità $1/(n-1)$.

Spiegazione:

Numeriamo le persone da 1 a n seguendo o il senso orario o antiorario la persona che riceve per prima la zuppiera sia la numero 1 .

Chiamiamo $p(i,l)(j)$ la probabilità che l'ospite j sia servito per ultimo quando la zuppiera è in mano all'ospite i ed l è l'insieme degli ospiti già serviti, allora

$$p(i,l)(j) = \frac{1}{2}p(i_1,l_1)(j) + \frac{1}{2}p(i_2,l_2)(j)$$

dove i_1 ed i_2 sono la persona che precede e che segue i ed l_1 e l_2 i nuovi insiemi con l'eventuale aggiunta di i_1 e/o i_2 se non già presenti.

La probabilità $p(i,l)(j)$ sarà 1 se i è diverso da j e tutti gli altri ospiti sono già serviti mentre sarà 0 se $i=j$ e non tutti gli ospiti sono stati già serviti.

Si può così generare un albero dal quale ottenere un sistema di equazioni la cui soluzione ci dà la probabilità cercata.

Nella pagina successiva è riportato un esempio di albero con il sistema di equazioni per il caso $n=5$ e $j=3$.

Ho risolto il sistema per i casi più semplici ed ho sviluppato un programma in Javascript per i casi più complessi (da utilizzare per valori di n non molto alti) [ALBERO](#).

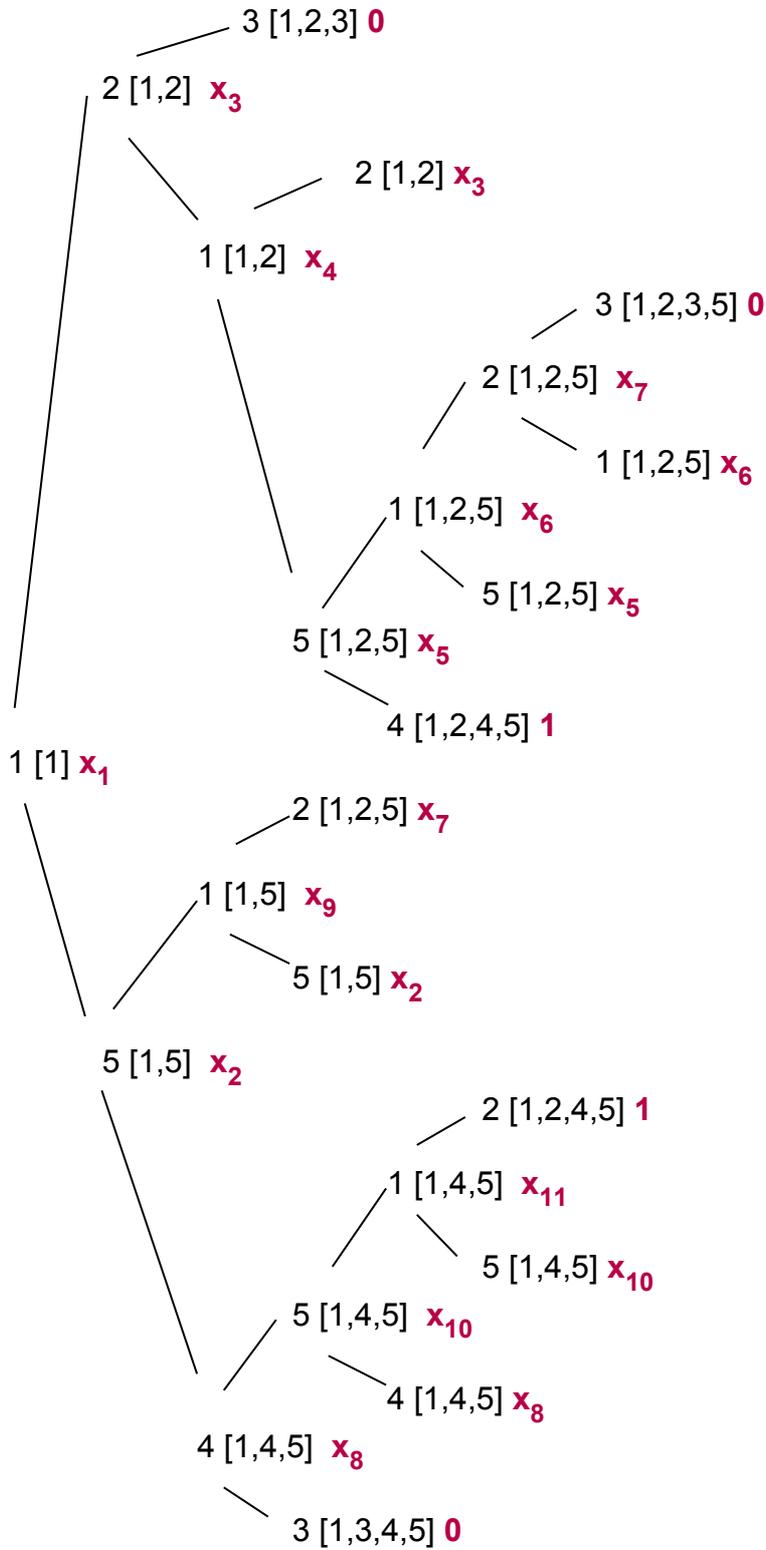
Per tutti i casi che ho preso in esame (fino a 30 persone), si ottiene che la probabilità è indipendente dalla distanza, per cui ho formulato la congettura che ciò sia valido sempre. Non ho trovato la soluzione per il caso generale.

Un ulteriore quesito che mi sono posto è il numero medio di passaggi della zuppiera prima che venga servito l'ultimo ospite; poiché il calcolo delle probabilità non è il mio forte, ho preferito sviluppare un secondo programma sempre in Javascript che simula il passaggio della zuppiera calcolando sia la probabilità di essere serviti per ultimi, sia il numero medio di passaggi della zuppiera [SIMULAZIONE](#).

Si può notare che questi aumentano notevolmente all'aumentare del numero di persone, per cui può accadere che Alice si serva per ultima ma debba mangiare una carbonara ormai fredda.

Numero di Persone a Tavola=5

Probabilità per il n. 3 Teorica=1/4 Calcolata $x_1=0.25$



Equazioni

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_2 - x_8 - x_9 = 0$$

$$2x_3 - x_4 = 0$$

$$2x_4 - x_5 - x_3 = 0$$

$$2x_5 - x_6 = 1$$

$$2x_6 - x_5 - x_7 = 0$$

$$2x_7 - x_6 = 0$$

$$2x_8 - x_{10} = 0$$

$$2x_9 - x_2 - x_7 = 0$$

$$2x_{10} - x_8 - x_{11} = 0$$

$$2x_{11} - x_{10} = 1$$